ЛЕКЦИЯ 16.
Неинерциальные системы отсчета.
Сила Кориолиса.

А.И. Валишев, В.Г. Сербо.

33. Неинерциальные системы отсчета.

Ранее рассмотрено движение материальных точек в инерциальных системах отсчета.
Сформулированы классические уравнения движения.

Рассмотрение движения в НЕинерциальной системе отсчета.

Постановка задачи.

НЕинерциальная система отсчета $\equiv$ движущаяся ускоренно относительно лабораторной, инерциальной.

Рассматривается движение частицы в НЕинерциальной системе отсчета S'.

Система отсчета S' **движется относительно лабораторной, инерциальной системы отсчета** S **поступательно**

с ускорением.

33. Неинерциальные системы отсчета.

Система отсчета S' **(НЕинерциальная) движется относительно лабораторной, инерциальной системы отсчета** S **поступательно с ускорением.**

В нерелятивистском приближении справедливы преобразования Галилея:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}', \quad t = t'.$$

Уравнение движения в инерциальной системе S**:**

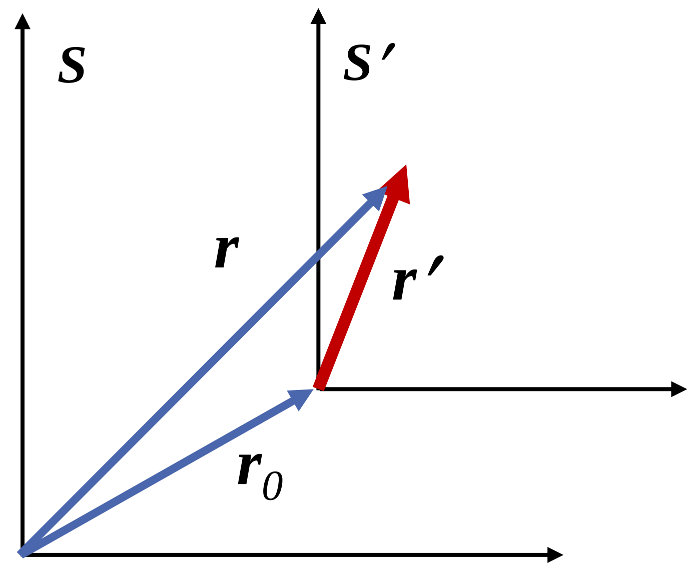
$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}.$$

Подстановка радиус-вектора в уравнение дает:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_0 + \vec{r}') = \vec{F}, \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} - m\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = \vec{F} - m\vec{a}_0;$$

$$\boldsymbol{m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0}.$$



$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}', \quad t = t'$$

Получено. Ускорение в системе отсчета S' **равно** $\boldsymbol{F}/m$ **минус некоторое фиктивное ускорение** $\boldsymbol{a}_0$ **.**

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}/m - \boldsymbol{a}_0$$

Df. **Фиктивная сила -** $m\boldsymbol{a}_0$ **называется силой инерции.**

Пример.

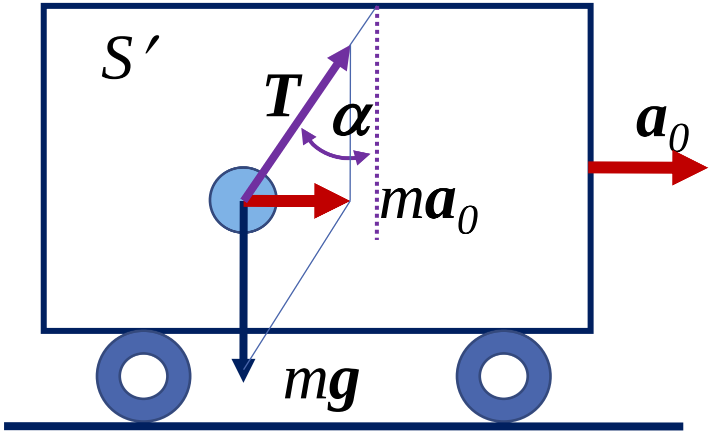
Угол отклонения грузика на нити в ускоренно движущемся с ускорением $\boldsymbol{a}_0$ **вагоне.**

В инерциальной системе S **существует угол отклонения** α**:**

$$T\cos\alpha = mg\ ,$$

$$ma_0 = T\sin\alpha\ ,$$

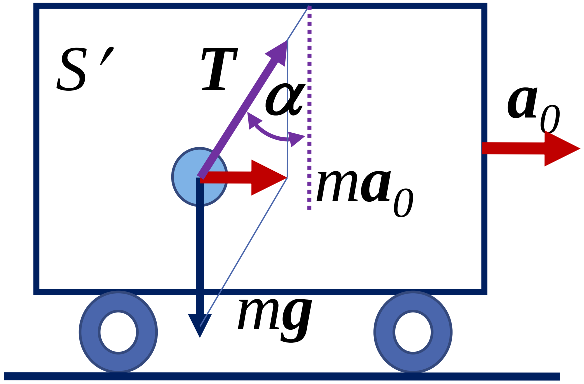
$$\text{tg}\alpha = \frac{a_0}{g}\ .$$

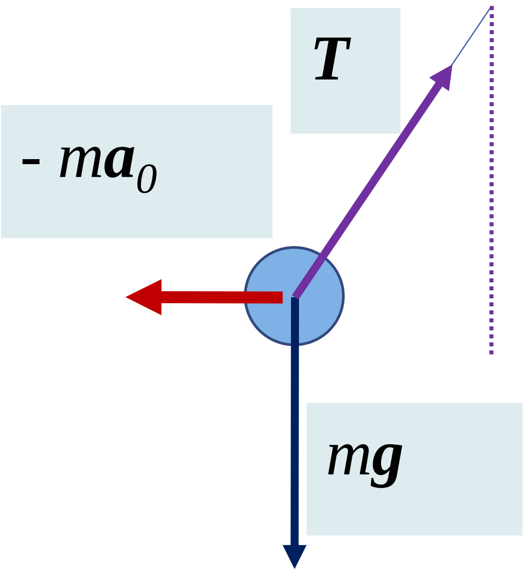


В НЕинерциальной системе отсчета *S′*:

Запишем условие равновесия в НЕинерциальной системе *S′* Действительно, в системе *S′* частица покоится! В НЕинерциальной системе сумма сил на грузик, поскольку он покоится должна быть равна нулю. Необходимо ввести фиктивную силу:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{T} = 0\ ???$$





$$\vec{T} = -m\vec{g} + m\vec{a}_0\ ,$$

$$T\sin\alpha = ma_0\ , \qquad T\cos\alpha = mg\ ,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_0}{g}\ .$$

Пример.(продолжение)

Определим частоту колебаний математического маятника в НЕинерциальной, движущейся ускоренно, системе S'. Положение равновесия смещено относительно вертикали Эффективное ускорение для колебаний относительного Нового положения равновесия в системе S':

$$\boldsymbol{g}' = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_0 \;;$$

Частота колебаний ω':

$$\omega' = \sqrt{\frac{g'}{l}} = \sqrt{\frac{g^2 + a_0^2}{l}} \,.$$

Утверждение.

Описание движения в НЕинерциальной системе отсчета S' сводится к добавлению силы инерции равной произведению массы тела на ускорение неинерциальной системы $m\boldsymbol{a}_0$ относительно заданной инерциальной, взятой с обратным знаком $(-m\boldsymbol{a}_0)$.

$$\boxed{m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 \,.}$$

34. Силы инерции во вращающейся системе отсчета.

34.1. Центробежная сила.

Для того, чтобы частица была неподвижной на вращающемся диске , к частице следует приложить центростремительную силу, направленную к центру (в дальнейшем для простоты $\boldsymbol{r}_0 \to \boldsymbol{r}$):

$$\vec{F} = m\vec{a} = -\,\vec{e}_r\,\frac{mv^2}{r} = -m\omega^2\vec{r}\,.$$

Для обеспечения неподвижности тела в S' следует добавить равную центростремительной силе силу инерции, направленную от центра.

В настоящем примере сила инерции, существующая только в НЕинерциальной, вращающейся системе отсчета S'.

Таковая сила существующая во вращающейся системе называется центробежной силой.

34. Силы инерции во вращающейся системе отсчета.

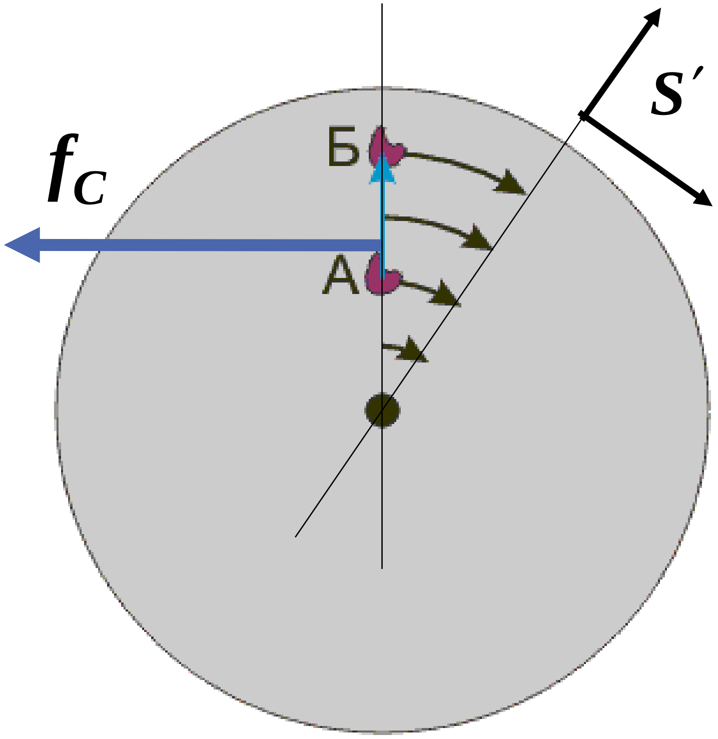
34.2. Сила Кориолиса.

34.2.1. Качественное рассмотрение.

Рассматривается перемещение тела с достаточно малой радиальной скоростью вдоль радиуса вращающегося диска так, что тело постоянно остается на радиусе. Перемещение происходит из т. *А,* **находящейся ближе к центру в точку** *Б,* **находящуюся на БОЛЬШЕМ радиусе (см. рис.).**

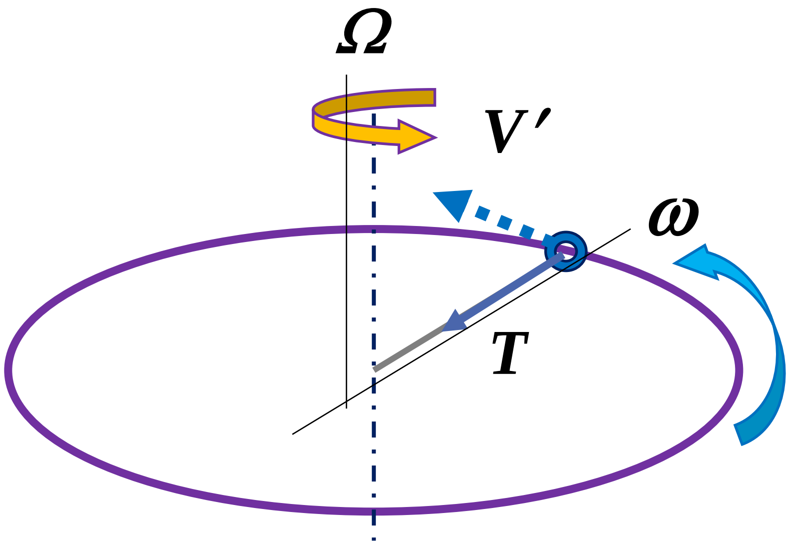
Поскольку перемещение сопровождается ростом линейной скорости тела, вдоль касательной к окружности, следовательно существует ускорение.

В системе отсчета S', вращающейся вместе с диском, для сохранения радиального – прямолинейного во вращающейся системе отсчета движения требуется сила, которая перпендикулярна радиусу – - сила Кориолиса f_C.



34.2.2. Элементарное рассмотрение силы Кориолиса.

Рассматривается вращение тела с угловой скоростью ω ($\omega \neq \Omega$) в инерциальной ЛС $\equiv S$. Тело удерживается на краю платформы радиуса R. Платформа вращается в ЛС $\equiv S$ с угловой скоростью $\Omega \in S$. Определим соотношение между силами в системах S, S'



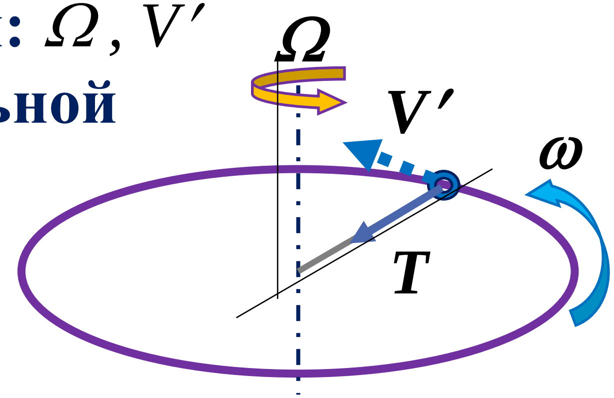
Запишем уравнения движения тела в системах S, S'. На тело, движущееся по окружности постоянного радиуса с постоянной скоростью, действует центростремительная сила – сила натяжения T.

В Л системе S, сила натяжения $\boldsymbol{T}$ ($\omega \neq \Omega$):

$$-\boldsymbol{T} = -m\,\omega^2 R. \quad (T \uparrow\downarrow R)$$

34.2.2. Элементарное рассмотрение силы Кориолиса.(продолжение)

Выразим зависимость силы натяжения *T* от кинематических параметров платформы: Ω, V'



Запишем скорость тела НЕинерциальной системе платформы – S'**:**

$$V' = (\omega - \Omega)R\ ,$$

Отсюда: $\omega = \Omega + V'/R\ ;$

Подстановка в *T* $(T = |T|)$ **:**

$$-\mathbf{T} = -\ m\ \omega^2 R = -m\ \Omega^2 R - 2m\ \Omega V' - m\ V'^2/R\ ;$$

Выделим центростремительное ускорение a' $(ma' = -mV'^2/R)$ **в НЕинерциальной системе платформы** S' **:**

$$a' = -V'^2/R \ \rightarrow$$

$$-T = -m\ \omega^2 R = -m\ \Omega^2 R - 2m\cdot\Omega V' + ma'.$$

Отсюда:

$$ma' = -m\ V'^2/R = -T + m\ \Omega^2 R + 2m\cdot\Omega V'.$$

Сравним с общим утверждением:

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_0 \; .$$

$$ma' = m\,V'^2/R = T - m\,\Omega^2 R - 2m\cdot\Omega V', \quad (*)$$

Утверждение.

Фиктивной, силой инерции в (*) следует считать:

$$m\boldsymbol{a}_0 = m\,\Omega^2\boldsymbol{R} + 2m\cdot\Omega V'$$

Первое слагаемое – $m\,\Omega^2\boldsymbol{R}$ **= центробежная сила** $F_{Ц}$**.**

Второе слагаемое – сила Кориолиса $\boldsymbol{f}_C$ **:**

$$\boxed{f_C = 2m\cdot\Omega V' \; .}$$

Сила Кориолиса – вектор, ее векторное выражение:

$$\boldsymbol{f}_C = 2m\cdot\boldsymbol{V}'\times\boldsymbol{\Omega}; \qquad \boldsymbol{f}_C \perp \boldsymbol{\Omega},\; \boldsymbol{f}_C \perp \boldsymbol{V}'.$$

34.3. Общий случай.

Пример.

Тело имеет относительную скорость в системе S' с составляющей вдоль радиуса V': $V_{||} = V'$.

Рассмотрим движение тела с постоянной скоростью в инерциальной системе отсчета S. Если -

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{const} \rightarrow \sum \boldsymbol{F} = 0\,.$$

В системе отсчета S сумма сил, действующих на тело равна нулю.

Рассмотрение движения относительно неинерциальной системы S', вращающейся с угловой скоростью Ω платформы (см. рис.). Задана продольная, вдоль радиуса платформы скорость тела V'. В начальный момент времени тело находится в т. *A*.

Поперечная относительно радиуса скорость тела в S : $\boldsymbol{V}_{\perp} = \Omega r$, Во вращающейся системе S' поперечная скорость $\boldsymbol{V}'_{\perp} = 0$. Продольные скорости в S и S' одинаковы.

Рассмотрение движения относительно неинерциальной системы S', вращающейся с угловой скоростью Ω платформы (см. рис.).
Задана продольная, вдоль радиуса платформы скорость тела V'.
В начальный момент времени тело находится в т. *A*.

Поперечная относительно радиуса скорость тела в S : $V_{\perp} = \Omega r$,
Во вращающейся системе S' поперечная скорость $V'_{\perp} = 0$.
Продольные скорости в S и S' одинаковы.
Через бесконечно малый интервал времени τ в системе S смещение составит:

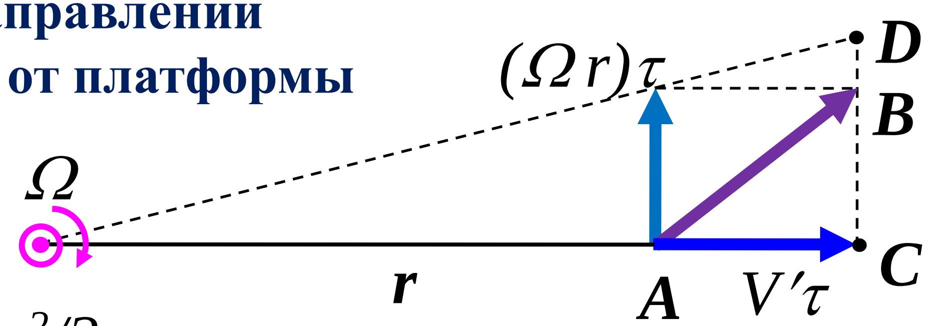
в продольном направлении: $V'\tau$,

в поперечном направлении $(\Omega r)\tau$.

В системе S поперечное смещение т. *C* должно! составить *CD* =

$$CD = (r + V'\tau)\cdot \Omega\, \tau \,.$$

Во вращающейся системе S' тело сдвигается продольно на $V'\tau$;
в поперечном относительно радиуса направлении всего на отрезок BD . В S' тело отстает от платформы вследствие действия силы Кориолиса!



Сдвиг *BD* :

$$BD = \Omega \cdot V'\tau^2 \;=\; (f_C\,/m)\cdot\, \tau^2/2 \,.$$

$$BD = \Delta\, s = a_C\, \tau^2/2 = \Omega\cdot V'\tau^2\, !$$

Формулировка II-го закона Ньютона в НЕинерциальной вращающейся системе отсчета.

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{ц} + \vec{f}_{C}}$$

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + m\Omega^2\vec{r} + 2m \cdot \vec{V}' \times \overrightarrow{\Omega}}$$

$\vec{a}'$ - **ускорение во вращающейся (НЕинерциальной) системе отсчета.**

34.3. II-й закон Ньютона во вращающейся системе отсчета. (Формальный вывод.)

Постановка задачи.

Имеются инерциальная система отсчета – S**, а также вращающаяся с угловой скоростью** $\boldsymbol{\Omega}$ **система отсчета** S'**.**
Требуется определить формальное выражение
II-го закона Ньютона во вращающейся системе отсчета.
$\boldsymbol{\Omega}$ **– вектор угловой скорости одинаков в** S **и** S' **.**

34.3. II-й закон Ньютона во вращающейся системе отсчета. (Формальный вывод.) Продолжение.

Для простоты будем считать начала отсчета S, S' совмещены.

$$\vec{r} = \vec{r}\,' ; \qquad \vec{r} \in S , \qquad \vec{r}\,' \in S' .$$

Ранее показано: дифференцирование по времени дает:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,' , \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\Omega} \times \vec{r}\,' . \qquad (*)$$

Для произвольного вектора, зависящего от времени *A* =*A*(*t*) такого, что:

$$\vec{A}(t) = \vec{A}'(t) ,$$

очевидно:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{A}'}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{A}' . \qquad (**)$$

Выполним формальные преобразования производных по времени- первой производной и второй во II- м законе Ньютона, записанном в инерциальной системе отсчета S .

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \, .$$

Отметим, что внешняя сила, зависящая от взаимного расстояния между силовым центром и частицей одинакова как в S, так и в S' :

$$\vec{F} = \vec{F}' \, .$$

Дифференцируя скорость *v* из *(*)* по правилу *(**)* *(*необходимо дифференцировать и скорость и радиус вектор по правилу *(**))* получаем:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) + \vec{\Omega} \times \left(\vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) =$$

$$= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) = \vec{F} \, ;$$

Окончательно:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}' + 2 \cdot \vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right).$$

Подстановка в исходное уравнение движения дает:

$$m\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{F}' - m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\,\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'\,.$$

Пусть угловая скорость вращения постоянна $\vec{\Omega} = const$.

Положим в уравнении $\dot{\vec{\Omega}} = 0$.

Уравнение движения частицы в неинерциальной, вращающейся системе отсчета принимает вид:

$$m\,\frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{F}' - m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}'\,.$$

2-е слагаемое есть центробежная сила:

$$\vec{F}_{\text{центробежн.}} = -\,m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right);$$

3-е слагаемое сила Кориолиса:

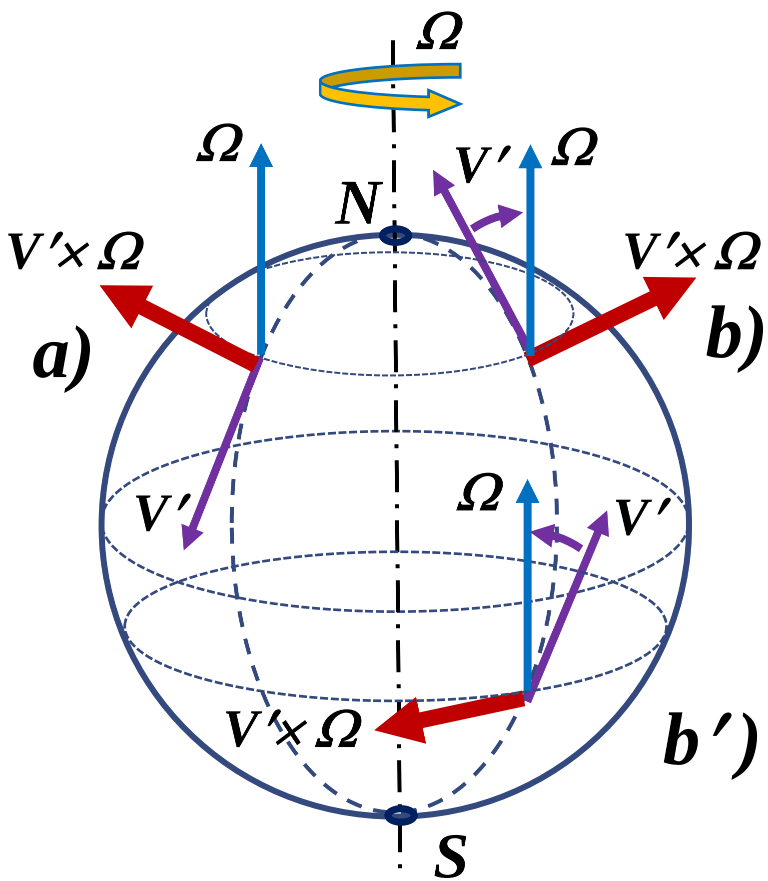
$$\vec{f}_C = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = +2\,m\vec{v}' \times \vec{\Omega}\,.$$

Центробежная сила по правилу «бац – цаб» преобразуется к виду:

$$m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) = m\Omega^2\vec{r}' - m\vec{\Omega}\left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}'\right)\,.$$

В случае $\vec{\Omega} \perp \vec{r}'$ центробежная сила: $\vec{F}_{\text{центробежн.}} = m\Omega^2\vec{r}'\,.$

Закон Бэра.

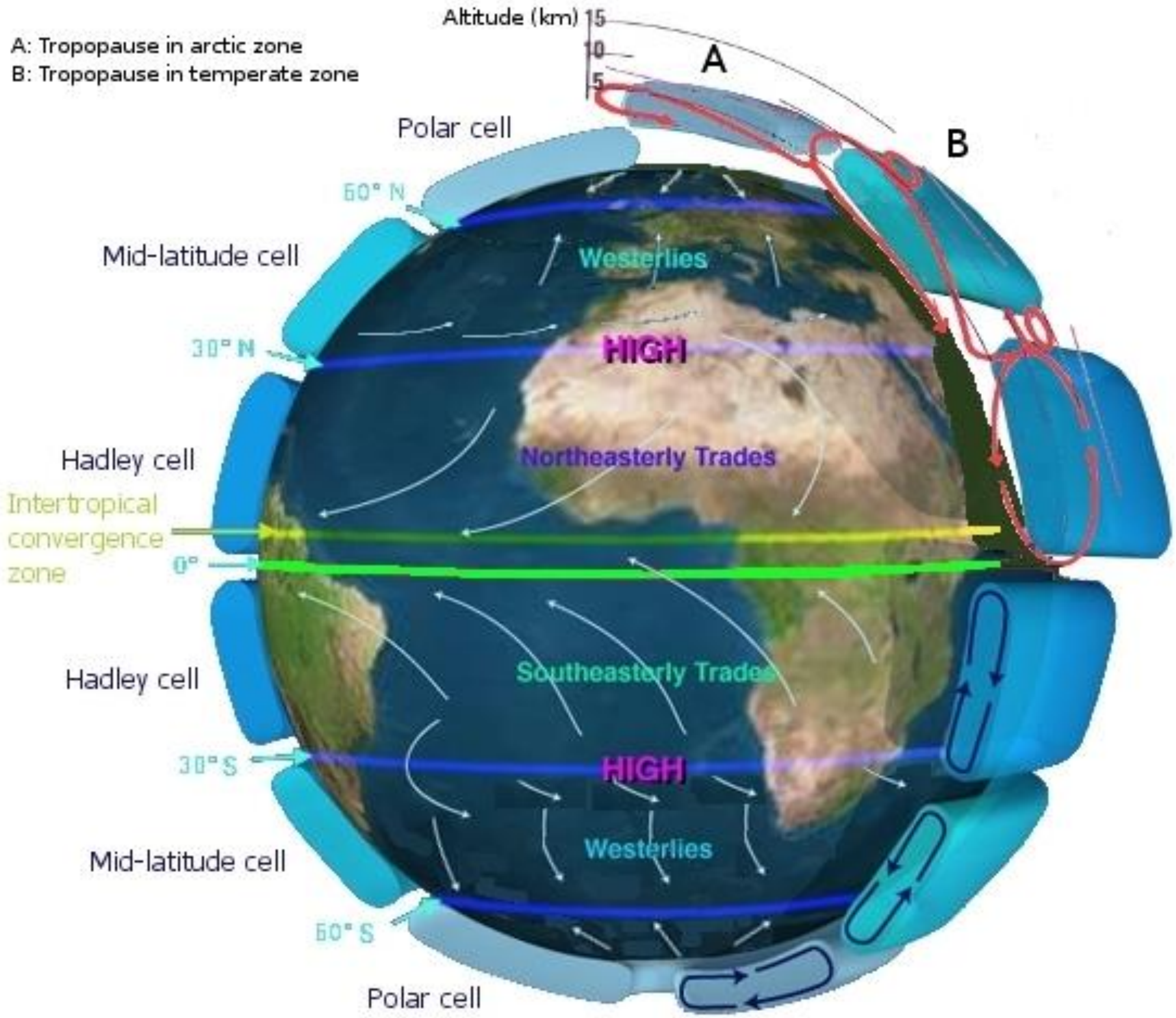


Направления силы Кориолиса в северном и южном полушариях при движении на юг *S* – (*a*) ; север *N* – (*b*, *b′*).

Для дальнейших оценок угловая скорость суточного Обращения Земли:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6{,}28}{86400} = \cong 7{,}27 \cdot 10^{-5} \quad (\text{рад/с})\,.$$

Закон Бэра.



Earth Global Circulation (NASA)

Закон Бэра.

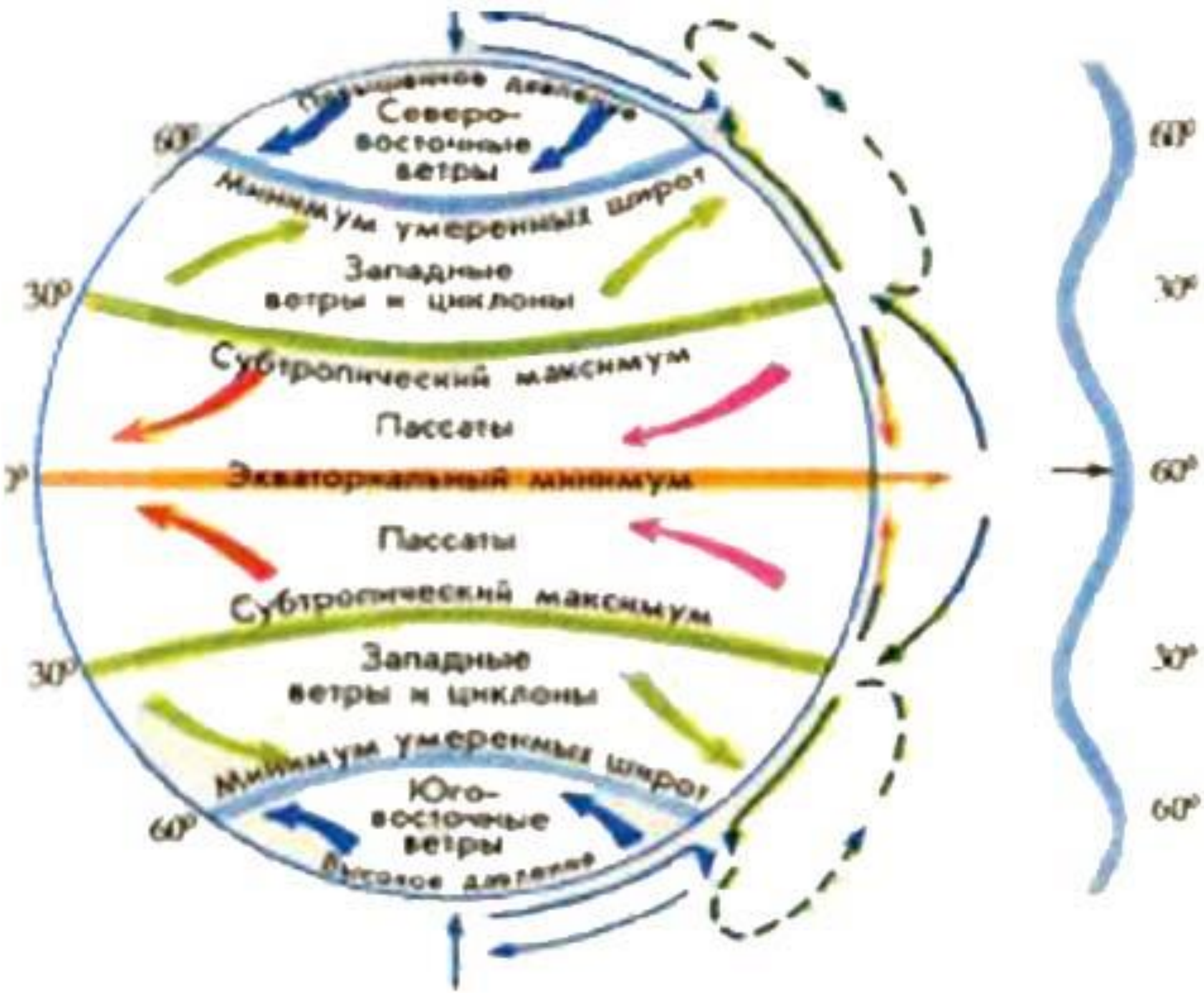
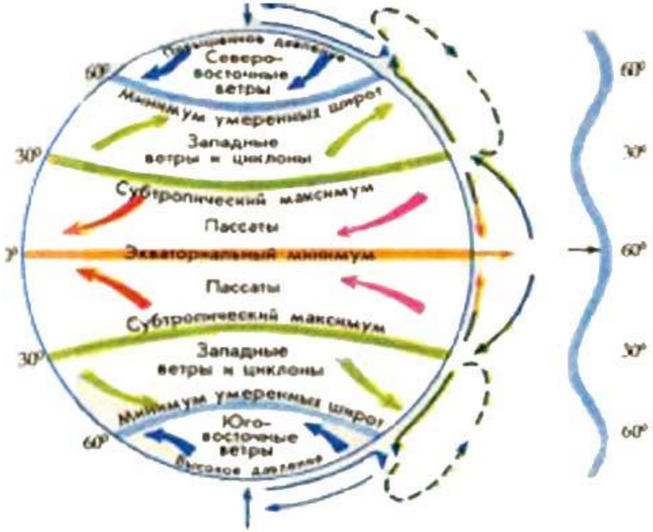


Схема. Общая циркуляция атмосферы

Закон Бэра.



ОБЩАЯ ЦИРКУЛЯЦИЯ АТМОСФЕРЫ — движение воздушных масс в тропосфере и нижней стратосфере. Климатообразующий процесс переноса и обмена влагой и теплом между разными частями Земного шара.

З.Б. формирует погоду каждого региона. Причина перемещения воздушных масс в неодинаковости распределения атмосферного давления и нагревании Солнцем поверхности суши, океанов, льда на разных широтах, а также в отклоняющем воздействии на воздушные потоки вращения Земли.

В нижней стратосфере струйные течения воздуха в умеренных и субтропических широтах преимущественно западные, в тропических восточные. Идут со скоростью до 150 м/с (540 км/час!) относительно земной поверхности.

В нижней тропосфере преобладающие направления переноса воздуха различаются по географическим поясам. В полярных широтах восточные ветры; в умеренных — западные с частым нарушением циклонами и антициклонами, наиболее устойчивы пассаты и муссоны в тропических широтах. В связи с разнообразием подстилающей поверхности на форме общей циркуляции атмосферы возникают районные отклонения — местные ветры.

Кориолисово ускорение.

Показано, что слагаемое $2m \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$ появляется в записи II - го закона Ньютона в НЕинерциальной системе. Оно дает правильное описание движения во вращающейся системе материальной точки, которая в инерциальной системе покоилась. Что оно дает?

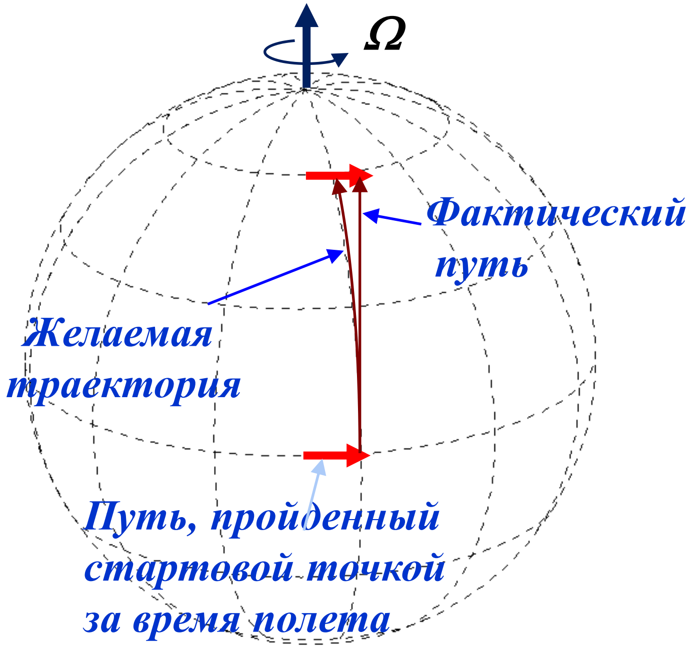
$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + 2m \cdot \dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + m \cdot \vec{\Omega} \times \left(\vec{r} \times \vec{\Omega}\right) .$$

Пример. **Ракета запущена с экватора вдоль меридиана.**

Необходимо поразить цель на широте φ.

В инерциальной системе отсчета азимутальная скорость ракеты всегда равна линейной скорости вращения Земли на экваторе. Однако, траектория ракеты пролегает над участками Земной поверхности, где азимутальная скорость меньше экваториальной. Из-за разности скоростей ракета кажется отклоняющейся на восток.

$$v_{Equator} = \Omega R_{\oplus} =$$
$$= \left(7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\frac{\text{рад}}{c}\right) \cdot \left(6{,}4 \cdot 10^{6}\text{м}\right) \cong 470\ \frac{\text{м}}{c}\ ;$$
$$v(\varphi) = \Omega R_{\oplus} \sin\varphi = 470 \cdot \sin\varphi\,;\ \ (\text{м}/c)$$

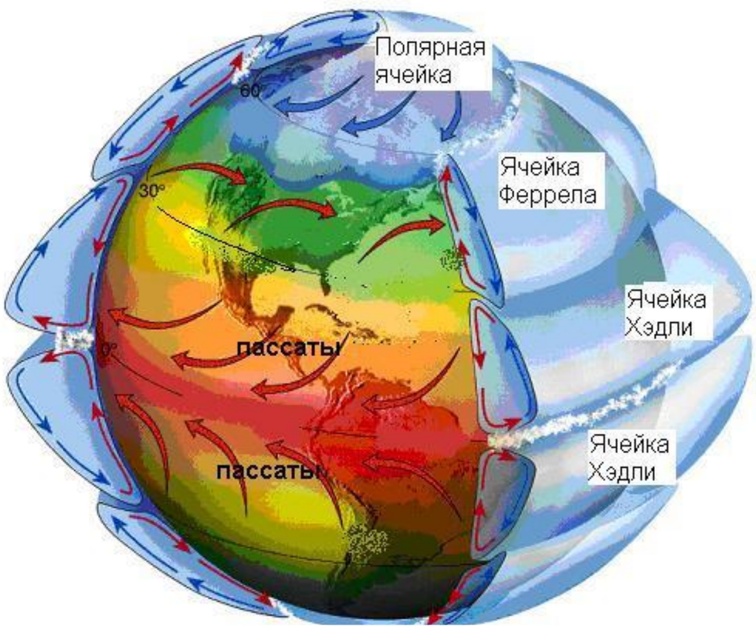


Причиной этого отклонения в системе, связанной с вращающейся Землей является специфическая сила инерции – сила, пропорциональная Кориолисову ускорению.

Кориолисово ускорение.

Кориолисово ускорение *в северном полушарии* отклоняет ветры, дующие *в верхних слоях атмосферы* в направлении полюса *на запад*, а *возвращающиеся к экватору – на восток*. Оба раза в правую сторону относительно направления движения. Поэтому погода к нам приходит из Москвы, а время полета в Москву на полчаса короче, чем обратно.

В южном полушарии *отклонения происходят в левую сторону!*,
но направления ветров те же самые!

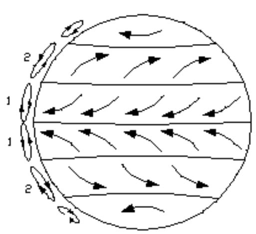


Поворот движения ветров на *90°* происходит на южных и северных широтах примерно на *~30°*.

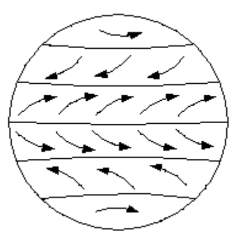
На этих широтах сухой (влагу он оставил в облаках вблизи экватора) и теплый воздух опускается вниз и отправляется к экватору, образуя ячейку Хэдли.

Это широты, на которых находятся крупнейшие пустыни Земли – Сахара в Африке, Аравийская пустыня и пустыня Тар в Азии, Калахари в Африке.

Часть опускающихся потоков направляется к полюсам, образуя ячейки Феррела.



Ветры у поверхности



Ветры в верхних слоях

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

http://phys.nsu.ru/fit

http://el.nsu.ru